BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ОПЕРАТОРОМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.Ф.БАБАЕВА

Институт систем управления им. ак. А.Гусейнова НАН Азербайджана, Бакинский Государственный Университет

seva_babaeva@mail.ru

В работе исследована некоторая краевая задача для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка. Уравнение и краевое условие возмущены некоторыми операторами. Получены достаточные условия на коэффициенты уравнения и на оператора, участвующего в краевом условии, которые обеспечили регулярную разрешимость рассмотренной задачи.

Ключевые слова: *гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнение, краевая задача, положительно-определенный самосопряженный оператор.*

Пусть – сепарабельное гильбертово пространство, – положительно-определенный самосопряженный оператор в . Обозначим через шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором , т.е. При считаем, что

Обозначим через гильбертово пространство функций , определенных почти всюду в интервале со значениями в измеримых, квадратично интегрируемых в смысле Бохнера, с нормой

В дальнейшем означает пространство линейных ограниченных операторов, действующих из банахово пространство в банахово пространство . Далее введем гильбертово пространство [1] с нормой

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле теории распределений [1]. Определим также следующее подпространство пространства

Из теоремы о следах [1] следует корректность этого определения. Аналогично определяются пространства и при

Рассмотрим в следующую краевую задачу

где – функции со значениями в а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) – положительно-определенный самосопряженный оператор;

2) причем

3) – ограниченные операторы в

Определение 1. Если при любом существует функция,

удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в то ее будем называть регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если при любом существует регулярное решение уравнения (1) удовлетворяющиеся граничную условию (2) в смысле сходимости и имеет место оценки

то задача (1), (2) называется регулярно разрешимой.

В данной работе мы укажем достаточные условия на коэффициенты краевой задачи (1), (2), которые обеспечивают регулярно разрешимость этой задачи. Аналогичные условия найдены в работах [2,7] при некоторых краевых задач. Обозначим, через и Сперва докажем следующую лемму.

Лемма 1. Операторы причем

Доказательство. Пусть Тогда Используя спектральное разложение оператора получаем:

Лемма доказана. Отсюда получаем

Следствие 1. Оператор , причем

Действительно, при

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1) и 2). Тогда при оператор изоморфно отображает пространство на

Доказательство. Покажем, что при выполнения условия теоремы Действительно уравнение имеет общее регулярное решение в виде Тогда из условия следует, что

Таким образом, относительно получаем уравнение или где при Очевидно, что

Применяя неравенство (4) получаем, что Так как то Тогда оператор обратим в и из уравнения следует, что Тогда Заметим, что из условия следует, что

Теперь покажем, что образ оператора совпадает с С этой целью покажем, что уравнение имеет решение при всех

Покажем, что вектор-функция

принадлежит к пространству где есть преобразование Фурье вектор-функции

Действительно, по равенству Парсеваля

Здесь есть преобразование Фурье вектор-функции Так как при всех

и

то Аналогично доказывается, что и

Тогда и

Теперь будем искать решение уравнения в виде

где есть сужение вектор-функции на а принадлежит к определению. Отметим, что следовательно, из теоремы о следах следует, что Из условия следует, что т.е.

Тогда относительно получаем уравнение

т.е.

Так как обратим в то Таким образом, Очевидно, что есть регулярное решение уравнения

С другой стороны, из неравенства и из теоремы Банаха об обратном операторе следует утверждение теоремы. Из этой теоремы следует, что

Следствие 2. Пусть выполняется условия 1). Тогда задача

регулярно разрешима.

Действительно, при получаем утверждение следствия.

Лемма 2. Каждое регулярное решение задачи (7), (8) удовлетворяет следующее неравенство

где причем они наименьшие числа в неравенстве (9).

Доказательство. Мы будем использовать методику работы [8]. Пусть – регулярное решение задачи (7, 8). Тогда

Так как

то

Следовательно,

Из этого неравенства следует верность неравенства (9) при и
Докажем остальные неравенства. При рассмотрим операторные пучки

Покажем, что при операторный пучок представляется в виде

где

причем, и

Действительно, при и при имеем:

Поэтому полином не имеет корней по мнимой оси, корни симметричны относительно вещественной оси и начала координат. Тогда

и

причем и Далее, сравнивая коэффициенты в равенстве (13), получаем, что при

а при

Используя спектральное разложение оператора из (13) и (14) получаем (11) и (12). Далее, легко проверяется следующее равенство

где а

Из результатов работы [7] следует, что если не имеет решение из интервала то если существует решения из интервала и наименьшее из них то

Поэтому мы должны решать уравнение вместо (15). Тогда получаем, что т.е. тогда из второго соотношения из (15) следует, что а из первого соотношения из (15) следует, что

Следовательно, Для нахождения мы имеем уравнение тогда из первого соотношения из (16) следует, что т.е. тогда и Следовательно, Лемма доказана.

Имеет место следующая лемма об оценке промежуточных производных в пространстве

Лемма 3. Пусть и Тогда имеет место следующие неравенства

где

Доказательство. Так как то по теореме 1 существует такой, что то учитывая, что существует регулярное решение задачи (7); (8) для которого Тогда представимо в виде поскольку есть общее регулярное решение уравнения Тогда из представления следует, что По лемме 1 и 2 получаем, что

Так как то следовательно

Так как то относительно получаем уравнение

т.е. Тогда и

С другой стороны, т.е

Учитывая (19) и (20) в неравенстве (18) получаем, что

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполняется условия 1) – 3), причем и имеет место неравенство

Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима. Здесь числа определены из леммы 3.

Доказательство. Напишем задачу (1), (2) в виде уравнения где По теореме 1 есть изоморфизм. Тогда, обозначив мы получаем уравнению в С другой стороны, применяя лемму 3 получаем:

Так как то и

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Мадженес Д. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Aliev A.R., Babaeva S.F. On the Boundary Value Problem with the Operator on Boundary

Conditions for the Operator-Differential Equation of the Third Order //Journal of Math. Phusics, Analysis, Geometry, 2010, v. 6, No 4, pp. 347-361.
3. Mirzoyev S.S., Babaeva S.F. Theory of Solvability of Boundary Value Problems for Third Order Operator-Differential Equations. Journal for Theory and Applications. Applied Mathematical Sciences. Vol.7 No.141-144, 2013
4. Бабаева С.Ф. Об одной краевой задаче с оператором в краевом условии для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка. Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2014, № 1, с. 58-63
5. Мирзоев С.С., Бабаева С.Ф. Об одной краевой задаче в гильбертовом пространстве для операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка. Известия Педагогического Университета. Серия естественных наук, Баку, 2014, № 3, с.3-8.
6. Бабаева С.Ф. Об одной краевой задаче с оператором в краевом условии для операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка. Актуальные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 55-летию Института Математики и Механики. Баку, 2014, с. 96-97.
7. Mirzoyev S.S. On the Corcus of Operators of Intermediate //Transaction of NAS. Azerbaijan, Ser. of Physics, Techn., Math. Sciences, 2003, v. 23, pp.93-102.

HİLBERT FƏZASINDA OPERATOR SƏRHƏD ŞƏRTLİ ÜÇÜNCÜ TƏRTİB OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

S.F.BABAYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə üçüncü tərtib operator-diferensial tənlik üçün bir sərhəd məsələsinə baxılıb. Tənlik və sərhəd şərti müəyyən operatorlarla həyacanlandırılıb. Tənlikdə və sərhəd şərtinə daxil olan operatorlar üçün kafi şərtlər tapılmışdır ki, bu şərtlər daxilində məsələnin korrekt və birqiymətli həll olunması təmin olunur.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, operator-diferensial tənlik, sərhəd məsələsi, müsbət-müəyyən öz-özünə qoşma operator

ON THE SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE OPERATIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER IN HILBERT SPACES

S.F.BABAYEVA

SUMMARY

The paper considers a boundary value problem for the operational-differential equation of the third order. The equation and the boundary conditions are indignant by some operators. The correct and univalent solvability of this problem is proved with the sufficient conditions on operators, which are included in the equation and boundary condition.

Key words: Hilbert spaces, operator-differential equations, boundary problem, positive defined selfadjoint operator

Поступила в редакцию: 03.06.2015 г.
Подписано к печати: 17.11.2015 г.